MATHS II (M')

DURÉE : 4 heures

Les deux parties de ce problème sont indépendantes

PARTIE I

A

On considère, sur l'espace vectoriel complexe des applications de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, le produit scalaire hermitien :

$$< f, g > = \sum_{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \overline{f(m)} \cdot g(m).$$

1° Montrer que les fonctions h_k, $k = 0, \ldots, n-1$ définies par :

$$h_k(m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{2\,i\,\pi\,km}{n}\right) , \quad m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

constituent une base orthonormée de cet espace.

2° Comparer les décompositions dans cette base de deux fonctions f et g vérifiant :

(1) $$\sum_{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} g(m) = 0$$

(2) $$\forall\, m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} , \quad \frac{1}{2}\,[g(m) + g(m+1)] = f(m+1) - f(m)$$

Tournez la page S. V. P.

3° On suppose de plus que $|\, g(m)\,|$ est un nombre β indépendant de m. Montrer que :

$$2 \,.\, \mathrm{Im} < f, g > \;\leqslant\; n \,.\, \beta^2 \,.\, \mathrm{cotg}\, \frac{\pi}{n}$$

et que l'on a l'égalité si et seulement si g est proportionnel à h_1.

B

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 2. On appelle polygone à n côtés une application $A : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathcal{E}$, $m \longmapsto A_m$.

On appelle périmètre de A le nombre :

$$L(A) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \| \overrightarrow{A_m A_{m+1}} \|$$

et aire de A le nombre :

$$S(A) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \overrightarrow{OA_m} \wedge \overrightarrow{A_m A_{m+1}}$$

où $\wedge$ désigne le déterminant des coordonnées dans une base orthonormée directe.

Montrer que S(A) est indépendant du point 0.

1° Montrer qu'il existe un polygone à n côtés pour lequel la fonction $S(A)/L(A)^2$ atteint sa borne supérieure. Montrer qu'il correspond à la borne supérieure de la valeur absolue.

2° Soit B et C deux points de $\mathcal{E}$ et p un nombre strictement supérieur à $\| \overrightarrow{BC} \|$. Montrer que la borne supérieure de l'aire $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{BC}$ lorsque M varie en étant soumis à la contrainte $\| \overrightarrow{BM} \| + \| \overrightarrow{CM} \| = p$ est atteinte lorsque le triangle est isocèle : $\| \overrightarrow{BM} \| = \| \overrightarrow{CM} \|$.

3° Montrer qu'un polygone à n côtés pour lequel la borne supérieure de $S(A)/L(A)^2$ est atteinte a ses côtés égaux.

4° Pour $m \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note $x(m)$ et $y(m)$ les coordonnées de A_m dans une base orthonormée directe dont l'origine est le centre de gravité des A_m.

On pose $h(m) = x(m) + iy(m)$, $\quad g(m) = h(m+1) - h(m)$

et $\quad f(m) = \frac{1}{2}\,[h(m) + h(m+1)]$.

Montrer que $S(A) = -\frac{i}{2} < f, g >$.

Montrer que $S(A) \leqslant \left(4\, n \,.\, \mathrm{tg}\, \frac{\pi}{n}\right)^{-1} L(A)^2$. Quand a-t-on égalité ?

5° Quelle est la borne supérieure du rapport $S(A)/L(A)^2$ lorsque A décrit l'ensemble des polygones?

PARTIE II

A

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période 2π, de classe C^2.

1° Montrer que la fonction g_x définie par :

$$g_x(u) = \frac{f(u+x) - f(x)}{\sin \frac{u}{2}} \quad \text{pour} \quad u \neq 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

admet un prolongement sur $\mathbb{R}$ de classe C^1.

Démontrer qu'il existe une constante M strictement positive telle que pour tout x réel et pour tout u réel, $|\, g'_x(u)\,| < M$.

ENS ST-CLOUD FONTENAY 81 -17-

2° On pose, pour $n \in \mathbf{Z}$,

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \quad \text{et} \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(f)\, e^{ikx}.$$

Calculer $S_n(1)$ où 1 est la fonction constante de valeur 1.

Montrer que :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x+u) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}\, du$$

et que les fonctions $S_n(f)$ convergent uniformément vers f lorsque $n \to +\infty$.

3° Montrer que $a_n(f') = in\, a_n(f)$.

B

Dans le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe Γ définie par les équations paramétriques :

$$x(\theta) = p(\theta) \cos\theta - p'(\theta) \sin\theta$$
$$y(\theta) = p(\theta) \sin\theta + p'(\theta) \cos\theta$$

où p est une fonction réelle, périodique de période 2π, de classe C^2 et vérifiant :

$$p(\theta) + p''(\theta) > 0 \text{ pour tout } \theta \text{ réel.}$$

1° Quelle est l'équation de la tangente D_θ à Γ au point M_θ de paramètre θ? Montrer que $\Gamma - \{M_\theta\}$ est entièrement contenu dans l'un des demi-plans ouverts déterminé par D_θ.

2° *a.* Exprimer à l'aide des fonctions p et p' la longueur $l(\Gamma)$ de Γ et l'aire $\mathcal{A}(\Gamma)$ du domaine borné limité par Γ.

b. Exprimer $l(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\Gamma)$ à l'aide des coefficients $a_n(p)$, $n \geqslant 0$.

3° Montrer que $\mathcal{A}(\Gamma)/l(\Gamma)^2 \leqslant 1/4\pi$ et que l'égalité a lieu si et seulement si Γ est un cercle.

On considère maintenant une subdivision $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ telle que :

$$\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = 2\pi \quad \text{avec } |\theta_{i+1} - \theta_i| < \pi \text{ pour } i = 0, \ldots, n-1$$

et P le polygone convexe dont les côtés sont tangents au cercle unité en les points d'angle polaire $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$.

4° Calculer l'aire $\mathcal{A}(P)$ de P.

5° Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et $P(\Gamma, \theta)$ le polygone dont les côtés ont pour support les droites $D_{\theta_i + \theta}$, $i = 0, \ldots, n-1$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}(P(\Gamma, \theta))$ et montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{A}(P(\Gamma, \theta))\, d\theta \geqslant 2\, \mathcal{A}(P) \cdot \mathcal{A}(\Gamma)$$

et que l'égalité a lieu si et seulement si Γ est un cercle.

(On pourra démontrer et utiliser l'inégalité $\cos k\alpha - k^2 \cos\alpha > 1 - k^2$ pour k entier strictement supérieur à 1 et $0 < \alpha < \pi$.)

6° On pose $w(\theta) = p(\theta) + p(\theta + \pi)$; $w(\theta)$ est appelée largeur de Γ dans la direction θ.

Utiliser 5° pour montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} w(\theta) \cdot w\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta \geqslant 2\, \mathcal{A}(\Gamma)$$

et que l'on a l'égalité si et seulement si Γ est un cercle.

Montrer que si $\mathcal{A}(\Gamma) > \pi/4$, il existe une direction pour laquelle la largeur de Γ est strictement supérieure à 1 en valeur absolue.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail